

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 15.02.2025**Clasa a V-a****Barem de corectare și notare****Subiectul I**

- a) Să se arate că numărul $a = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$ este pătrat perfect;
b) Aflați valorile numărului natural n pentru care numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 97$ este pătrat perfect.

REZOLVARE:

- a) $a = 2025 + 2025 \cdot 2024$ **1 punct**
 $a = 2025^2$ **2 puncte**
b) Pentru $n=4$ obținem $x=121=11^2$ **1 punct**
Pentru $n \geq 5$ avem $U(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = 0$, deci $U(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 97) = 7$ **1 punct**
Finalizare **1 punct**
Oficiu **1 punct**

Subiectul II

Se consideră numerele naturale:

$$a = 2^4 \cdot [5^{13^2} : 25^{84} + (3^{2025})^{2024} : (3^{2024})^{2025} \cdot 3^{2025^0}] \text{ și } b = 2^{2022} \cdot 5^2 - 32^{404} \cdot 36 - 2^{2025}.$$

Comparați $(a^{45})^{45}$ cu b .**REZOLVARE:**

- $a = 2^4 \cdot (5^{169} : 5^{168} + 3) = 2$ **2 puncte**
 $b = 2^{2022} \cdot 5^2 - 2^{2020} \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 2^{2025} = 2^{2025}$ **3 puncte**
 $(a^{45})^{45} = a^{2025} = 2^{2025} = b$ **1 punct**
Oficiu **1 punct**

Subiectul III

Fiecare din numerele naturale: 1, 2, 3, 4,, 2024, 2025 se împarte cu rest la numărul 999. Să se demonstreze că suma tuturor resturilor obținute la aceste împărțiri este un număr divizibil cu 27.

REZOLVARE:

- Resturile împărțirilor numerelor 1, 2, 3,, 998 la 999 sunt: 1, 2, 3,, 998 **1 punct**
Resturile împărțirilor numerelor 999, 1000, 1001,, 1997 la 999 sunt: 0, 1, 2, 3,, 998 **1 punct**
Resturile împărțirilor numerelor 1998, 1999, 2000,, 2025 la 999 sunt: 0, 1, 2, 3,, 27 **1 punct**
Suma resturilor $S = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 998) + 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 27$ **1 punct**
Finalizare **2 puncte**
Oficiu **1 punct**

Subiectul IVÎntr-o cutie sunt 28 de bile roșii, galbene și verzi, astfel încât oricum am lua 21 de bile, vom găsi printre ele bile de toate culorile. Știind că numărul bilelor roșii este impar și este egal cu numărul bilelor galbene, aflați câte bile sunt de fiecare culoare. (*Gazeta matematică*)**REZOLVARE:**

- Notăm nr. bilelor roșii $r = 2k + 1$, unde k este un număr natural
nr. bilelor galbene $g = 2k + 1$, deci, $4k + 2 + v = 28$, unde v = nr. bilelor verzi **1 punct**
 $4k \leq 26$, de unde k poate fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 **1 punct**
 $k = 0 \Rightarrow r = g = 1, v = 26 > 21$, nu convine
 $k = 1 \Rightarrow r = g = 3, v = 22 > 21$, nu convine
 $k = 2 \Rightarrow r = g = 5, v = 18, 18 + 5 > 21$, nu convine
 $k = 3 \Rightarrow r = g = 7, v = 14, 14 + 7 = 21$, nu convine
 $k = 4 \Rightarrow r = g = 9, v = 10, 10 + 9 + 2 = 21$ sau $9 + 9 + 3 = 21$, convine
 $k = 5 \Rightarrow r = g = 11, v = 6, 11 + 11 > 21$, nu convine
 $k = 6 \Rightarrow r = g = 13, v = 2, 13 + 13 > 21$ nu convine condiției din enunț (oricum am lua 21 de bile, vom găsi printre ele bile de toate culorile) **4 puncte**
Oficiu **1 punct**